TD 07 ①

Exo 5 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $f(x,y)=(xe^y, e^x-\cos y)$

a) f est de classe C^∞ car ses composantes le sont.

$\overset{f_1}{(x,y)\mapsto xe^y}$ est C^∞ car produit de fonctions C^∞.

$\overset{f_2}{(x,y)\mapsto e^x-\cos y}$ est C^∞ car somme de fonctions C^∞.

La différentielle de f en (x,y) est représentée par la matrice Jacobienne

$$\mathrm{Jac}(f)(x,y)=\begin{pmatrix} e^y ; & xe^y \\ e^x & \sin y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}$$

b) $J_f(x,y)=\det \mathrm{Jac}(f)(x,y)=\det\begin{pmatrix} e^y & xe^y \\ e^x & \sin y\end{pmatrix}=e^y(\sin y - xe^x)$

Or $J_f(x,y)=0 \Leftrightarrow \sin y = xe^x$.

Donc par le théorème d'inversion locale, f est un difféomorphisme local en tout point $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tel que $\sin y\neq xe^x$.

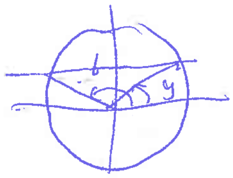
Autrement dit, $\mathrm{Crit}(f)=\{(x, \arcsin(xe^x)+2k\pi), (x;(2k+1)\pi-\arcsin(xe^x))$ t.q. $xe^x\in[-1,1], k\in\mathbb{Z}\}$.

$(\sin y = t$

$\Leftrightarrow y=\arcsin t+2k\pi$ $k\in\mathbb{Z}$

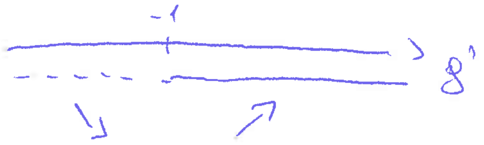
ou $y ~~=~~ (2k+1)\pi-\arcsin$

On sera plus précis après le point c.



c) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = xe^x$.

On étudie g : $g'(x) = xe^x + e^x = e^x(1+x)$.

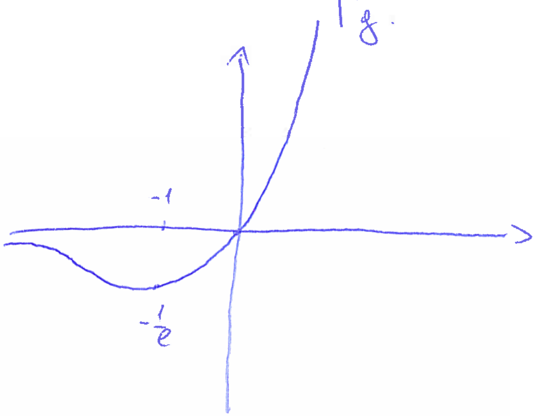


$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^x \cdot x = \lim\limits_{y\to+\infty} e^{-y}\cdot(-y) = \lim\limits_{y\to+\infty} -\dfrac{y}{e^y} = 0^-$

$g(-1) = -e^{-1} = -\frac{1}{e}$ est le minimum global

$g^{-1}(\{0\}) = \{0\}$.



d) $A =]1,+\infty[\times \mathbb{R}$.

On veut montrer que $A \cap \text{Crit}(f) = \emptyset$.

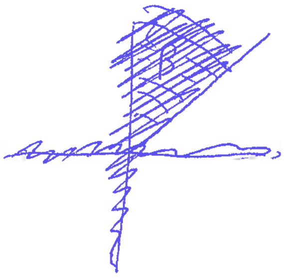
si $x=1$, $g(1) = e > 1$, et comme g est croissant sur $[1;+\infty[$,

on a que $xe^x \geq e > 1$ pour $x > 1$.

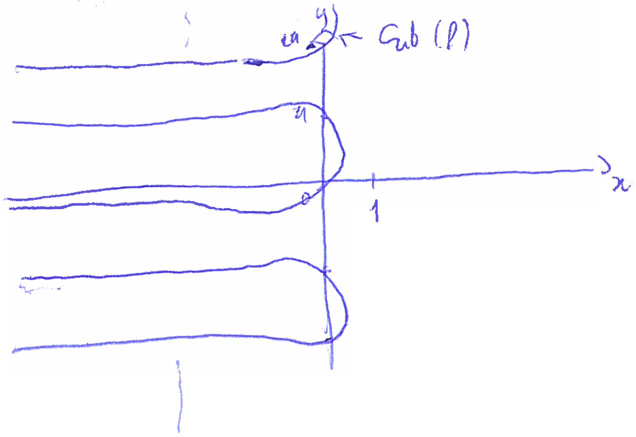
Il s'en suit qu'il n'y a pas de $y \in \mathbb{R}$ tels que $\sin y = xe^x > 1$, et

~~$A \cap]1,+\infty[$~~ $A \cap \text{Crit}(f) = \emptyset$. . C'est à dire, f est un difféomorphisme local en A.

~~$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x \geq 0\}$~~



En effet, On peut dessiner Crit f :



e) $f : A \to f(A)$ définit un difféomorphisme si f est injective

(vu qu'on a déjà vérifié que f est un difféomorphisme local en A)

$$f(xe^y ; e^x - \cos y) = (a,b)$$

$$x>1 \Rightarrow \underset{\underset{a}{\shortparallel}}{xe^y} > 0 \text{ et } b = e^x - \cos y > e-1 > 0.$$

On veut montrer que $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$ le système $\begin{cases} xe^y = a \\ e^x - \cos y = b \end{cases}$ a au plus une solution dans A.

$$xe^y = a \Rightarrow e^y = \frac{a}{x} \Rightarrow y = \ln \underset{\vee\, 0}{a} - \ln \underset{\vee\, 0}{x}.$$

$$\Rightarrow e^x - \cos y = b \Leftrightarrow \underbrace{e^x - \cos(\ln a - \ln x)}_{h(x)} = b.$$

On veut montrer que, $\forall a > 0$, $h(x)$ est strictement croissante à $]1,+\infty[$,

$$h'(x) = \underset{\underset{e}{\geqslant}}{e^x} + \underbrace{\sin(\ln a - \ln x)\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)}_{\geqslant -1} \geqslant e-1 > 0.$$

Donc h est strictement croissante à $]1,+\infty[$, et donc $h(x) = b$ a au plus une solution à $]1,+\infty[$.

Comme y est déterminé de x de façon unique, on a que $\forall (a,b) \in \mathbb{R}_+^2$ il existe au plus un $(x,y) \in A$ tel que $f(x,y) = (a,b)$, donc $f|_A$ est injective.

Exo 8 $f_t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\quad f_t(x,y) = (x^2+ty\,;\, xy-t)$

a) f_t est de classe $\mathcal{C}^1$ ($\mathcal{C}^\infty$) car polynomiale.

La différentielle df_t est représentée par la matrice Jacobienne

$$Jac(f_t) = \begin{pmatrix} 2x & t \\ y & x \end{pmatrix}$$

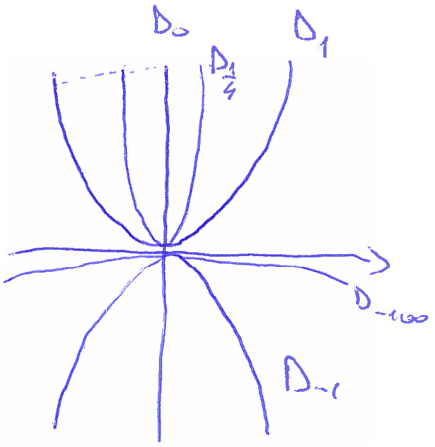
b) f_t est un difféomorphisme local en (x,y) ssi $J_{f_t}(x,y) \neq 0$,

où $J_{f_t}(x,y) = \det Jac(f_t)(x,y) = 2x^2 - yt$

Donc $D_t = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x^2 = yt\}$

Pour $t=0$, $D_0 = \{(0,y) : y \in \mathbb{R}\}$.

Pour $t \neq 0$ $D_t = \{(x,y) : y = \frac{2}{t}x^2\}$ est une parabole



Soit maintenant $f(x,y,t) = f_t(x,y) = (x^2+ty,\ xy-t)$

$\forall v = (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $\quad S_v = \{(x,y,t) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,t) = (a,b)\}$.

c) f est de classe $\mathcal{C}^1$ ($\mathcal{C}^\infty$) car polynomiale.

La différentielle $df : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ est représentée par la matrice Jacobienne:

$$Jac(f)(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & t & y \\ y & x & -1 \end{pmatrix}$$

d) Par le théorème de la fonction implicite, S_0 n'est pas localement en p_0 de la forme $\{x = g(t), y = h(t)\}$ si et seulement si le déterminant du

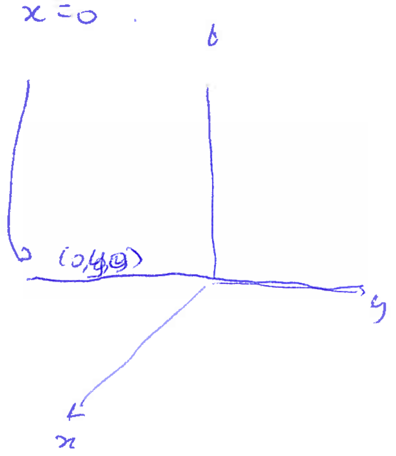
$\nwarrow \mathcal{C}^1 \nearrow$

mineur 2×2 qui correspond à x, y, qui coïncide avec $J_{f_t}(x,y)$, est $=0$.

Donc il faut trouver les points $(x,y,t) \in \mathbb{R}^3$ qui satisfont le système:

⑤

$$\begin{cases} (x,y,t) \in S_0 \\ J_{f_1}(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + ty = 0 \\ xy - t = 0 \\ 2x^2 - yt = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} yt = 0 \\ t = xy \\ x^2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \forall y \in \mathbb{R} \\ t = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$



e) Soit $v = (a,b)$, $C_v = f^{-1}(\{(a,b)\})$.

les points de C_v qui n'ont pas la propriété demandée satisfont :

$$\begin{cases} (x,y,t) \in C_v \\ J_{f_1}(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + ty = a \\ xy - t = b \\ 2x^2 - yt = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x^2 = a \\ t = xy - b \\ yt = 2x^2 \end{cases}$$

Si $a < 0$, le système n'a pas de solutions, et C_v est régulière en tout point, et globalement un graphe de la forme $\{(x,y) = (g(t), h(t))\}$.

$\nwarrow \quad \nearrow$
e^1

Si $a \geq 0$

$$\begin{cases} x = \pm\sqrt{\frac{a}{3}} \\ t = \pm y\sqrt{\frac{a}{3}} - b \\ y\left(\pm y\sqrt{\frac{a}{3}} - b\right) = \frac{2}{3}a \end{cases} \iff \begin{cases} x = \pm\sqrt{\frac{a}{3}} \\ t = \pm y\sqrt{\frac{a}{3}} - b \\ \pm y^2\sqrt{\frac{a}{3}} - by - \frac{2}{3}a = 0. \end{cases}$$

La dernière équation a comme discriminant $\Delta = b^2 + \frac{8}{3}a\left(\pm\sqrt{\frac{a}{3}}\right)$

Si on prend la solution avec le + $\left(x = +\sqrt{\frac{a}{3}}\right)$, alors $\Delta \geq 0$, et il y a deux solutions y_1, y_2 (~~[illegible]~~ qui peuvent coïncider, si $\Delta = 0$, c'est à dire
$a = b = 0$.)

Pour la solution avec $-$ $\left(x = -\sqrt{\frac{a}{3}}\right)$, alors $\Delta^2 = b^2 - \frac{8\sqrt{3}}{9}a\sqrt{a} \geq 0$

$\iff b^2 \geq \frac{8\sqrt{3}}{9}a\sqrt{a}$ $\iff$ ~~[illegible]~~,

Dans ce cas il y a encore deux solutions. Si $b^2 < \frac{8\sqrt{3}}{9}a\sqrt{a}$, il n'y en a pas

f) Par le théorème de la fonction implicite, C_v est régulière en p si et seulement si $\mathrm{Jac}(f)(p)$ est de rang 2.

$$\mathrm{Jac}(f)(x,y,t) = \begin{pmatrix} 2x & t & y \\ y & x & -1 \end{pmatrix}. \quad \text{rang } \mathrm{Jac}(f)(p) \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} -t - xy = 0 \\ -2x - y^2 = 0. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{y^2}{2} \\ t = -xy = \frac{y^3}{2} \end{cases}$$

Donc les points pas réguliers de C_v sont les points de C_v de la forme $\left(-\frac{y^2}{2}; y; \frac{y^3}{2}\right)$.

On va voir pour ~~quelles p~~ quelles valeurs de $v=(a,b)$ la courbe C_v contient de tels valeurs:

$$\begin{cases} x^2 + yt = a \\ xy - t = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y^4}{4} + \frac{y^4}{2} = a. \\ -\frac{y^3}{2} - \frac{y^3}{2} = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^4 = \frac{4}{3}a \\ y^3 = -b \end{cases}$$

$$(x,y,t) = \left(-\frac{y^2}{2}, y; \frac{y^3}{2}\right)$$

Donc ce système admet solution seulement quand $a \geq 0$, et

$$\left(\frac{4}{3}a\right)^3 = y^{12} = (-b)^4 \Leftrightarrow 64a^3 = 27b^4$$

Donc $\Gamma = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid 64a^3 = 27b^4\}$

Exo 11 $S = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \underbrace{x^2 - xy^3 - y^2 z + z^3}_{\overset{\shortparallel}{f(x,y,z)}} = 0 \}$.

a) $p_0 = (1,1,1)$. Montrons que $p_1 \in S$; c'est à dire que $f(1,1,1) = 0$

$f(1,1,1) = 1 - 1 - 1 + 1 = 0$ $\bigcirc\!\!\!\!\!\text{ok}$.

Pour montrer que p_1 est régulier, il faut vérifier que $\nabla f(p_0) \neq 0$.

(f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ car polynomiale, donc elle est différentiable partout)

$$\nabla f = \left(2x - y^3 ; -3xy^2 - 2yz ; -y^2 + 3z^2\right) = \left(2x - y^3 ; y(-2z - 3xy) ; -y^2 + 3z^2\right).$$

$\nabla f(1,1,1) = (2-1 ; -3-2 ; -1+3) = (1 ; -5 , 2) \neq (0,0,0)$ donc p_1 est régulier.

L'équation du plan tangent H de S en p_1 est donnée par $\nabla f(1,1,1) \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix} = 0$:

$$H = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1(x-1) - 5(y-1) + 2(z-1) = 0 \} = \{ x - 5y + 2z + 2 = 0 \}.$$

b) C'est une conséquence du théorème de la fonction implicite, car

$$\frac{\partial f}{\partial z}(1,1,1) = 2 \neq 0.$$

c) Toujours par le théorème de la fonction implicite, on a que

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(1,1) = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(1,1,1)}{\frac{\partial f}{\partial z}(1,1,1)} = -\frac{1}{2}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y}(1,1) = - \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(1,1,1)}{\frac{\partial f}{\partial z}(1,1,1)} = -\frac{-5}{2} = \frac{5}{2}.$$

Une autre façon pour le dire est que $H = \left\{ z - 1 = \underline{\frac{-(x-1) + 5(y-1)}{2}} \right\}$ est le plan tangent au graphe de ϕ en $(1,1,1)$.

$\hookrightarrow = \frac{\partial \phi}{\partial x}(x-1) + \frac{\partial \phi}{\partial y}(y-1)$

par Taylor,

d) On a déjà calculé le développement limité de ϕ à l'ordre 1 :

$$\underset{\overset{\shortparallel}{z}}{\phi(x,y)} - \underset{\overset{\shortparallel}{1}}{\phi(1,1)} = \nabla\phi(1,1)\cdot\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} + o(\|q-q_0\|)$$

où $q=(x,y)$, $q_0=(1,1)$. Dans ce cas :

$$z-1 = -\frac{1}{2}(x-1)+\frac{5}{2}(y-1)$$

Cette fonction approxime à l'ordre 1 l'équation $f(x,y,z)=0$ en $(1,1,1)$.

On veut maintenant écrire (on fixe $r=x-1$, $s=y-1$, $t=z-1$)

$$t = z-1 = -\frac{1}{2}r+\frac{5}{2}s + ar^2+brs+cs^2 + o(\|q-q_0\|^2), \quad (*)$$

et trouver $a,b,c \in \mathbb{R}$ tels que ce D.L. approxime à l'ordre 2 l'équation

$$x^2 - xy^3 - y^2z + z^3 = 0. \quad \text{en } (1,1,1).$$

On remplace $x=1+r$, $y=1+s$, $z=1+t$ et on obtient :

$$0=(1+r)^2-(1+r)(1+s)^3-(1+s)^2(1+t)+(1+t)^3 = 1+2r+r^2-1-r-3s-3sr-3s^2 + o(\|p-p_0\|^2) - 1 - 2s - s^2 - t - 2ts + o(\|p-p_0\|^2) + 1 + 3t + 3t^2 + o(\|p-p_0\|^2).$$

où ~~(p~~ $p-p_0=(r,s,t)$, et $o(\|p-p_0\|^2)$ contient tous les termes de degré ≥ 3.

On a donc

$$0 = \underbrace{1-1-1+1}_{\overset{\shortparallel}{0}} + r(2-1) + s(-3-2) + t(-1+3) +$$

$$+ r^2 1 + rs(-3) + s^2(-3-1) + rt\cdot 0 + st(-2) + t^2\cdot 3 + o(\|p-p_0\|^2)$$

$$= +r - 5s + 2t + r^2 - 3rs - 4s^2 - 2st + 3t^2 + o(\|p-p_0\|^2). \quad (**)$$

On remplace donc l'expression $(*)$ dans $(**)$, et on peut trouver

a, b, c tels que cet expression s'annulle. (à l'ordre 1 et 2).

Rmq : À l'ordre 1, on sait déjà que l'expression s'annulle, par le théorème de la fonction implicite

$$0 = r - 5s + 2\left(-\frac{1}{2}r + \frac{5}{2}s + ar^2 + brs + cs^2 + o(\|q-q_0\|^2)\right) + r^2 - 3rs - 4s^2$$

$$-2s\left(-\frac{1}{2}r + \frac{5}{2}s + o(\|q-q_0\|)\right) + 3\left(-\frac{1}{2}r + \frac{5}{2}s + o(\|q-q_0\|)\right)^2$$

$$= \cancel{r} - \cancel{5s} \cancel{-r} + \cancel{5s} + 2ar^2 + 2brs + 2cs^2 + r^2 - 3rs - 4s^2$$

$$+ rs - 5s^2 + \frac{3}{4}r^2 + \frac{75}{4}s^2 - \frac{15}{2}rs + o(\|q-q_0\|^2).$$

$$= r^2\left(2a + \frac{7}{4}\right) + rs\left(2b - \frac{19}{2}\right) + s^2\left(2c + \frac{39}{4}\right) + o(\|q-q_0\|^2).$$

On impose que cet écriture s'annulle à l'ordre 2, et on obtient :

$$\begin{cases} 2a + \frac{7}{4} = 0 \\ 2b - \frac{19}{2} = 0 \\ 2c = \frac{39}{4} = 0 \end{cases} \iff \begin{aligned} a &= -\frac{7}{8} \\ b &= +\frac{19}{4} \\ c &= \frac{39}{8}. \end{aligned}$$

Donc le DL à l'ordre 2 pour ϕ en $(1,1)$ est donné par

$$\phi(x,y) = 1 - \frac{1}{2}(x-1) + \frac{5}{2}(y-1) - \frac{7}{8}(x-1)^2 + \frac{19}{4}(x-1)(y-1) + \frac{39}{8}(y-1)^2 + o(\|q-q_0\|^2)$$

e) Par le théorème de Taylor (à l'ordre 2 avec reste de Peano), on a que

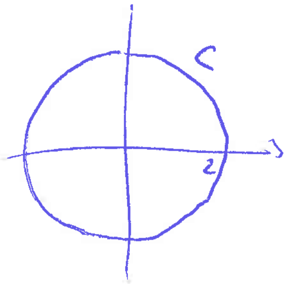
$$\phi(x,y) = \phi(1,1) + D\phi(1,1)\cdot\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(x-1, y-1)\cdot H(\phi)(1,1)\cdot\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} + o(\|q-q_0\|^2)$$

d'où on obtient de la question d : $H(\phi)(1,1) = \begin{pmatrix} -\frac{7}{4} & \frac{19}{4} \\ \frac{19}{4} & \frac{39}{4} \end{pmatrix}$.

Exo 13. $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2=4\}$.

a) f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ (car fonction rationnelle dont le dénominateur s'annulle que en $(0,0)$), qui est bien un voisinage de C ($\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ est ouvert et il contient C).

b) $f|_C$ est continue, et C est fermé et borné, donc compact dans $\mathbb{R}^2$.



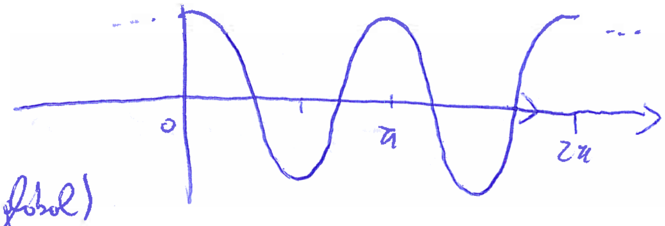
Toute fonction continue $f : C \to \mathbb{R}$ avec C compact admet max et min globaux.

c) C est le cercle de centre $(0,0)$ et rayon 2. Une paramétrisation est donnée par $\gamma : \mathbb{R} \to C$
$\gamma(t) = (2\cos t, 2\sin t)$. (la paramétrisation est 2π-périodique).

d) $f \circ \gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est donnée par

$$f \circ \gamma(t) = \frac{4\cos^2 t - 4\sin^2 t}{4(\cos^2 t + \sin^2 t)} = \cos^2 t - \sin^2 t = \cos 2t.$$

Le graphe de $f \circ \gamma$ est donné par:



Donc $f \circ \gamma$ admet max local (et global) en $t = k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, et min locaux en $t = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $\forall k \in \mathbb{Z}$.

Il s'en suit que $f|_C$ admet maxima locaux en $\gamma(0) = (2,0)$ et $\gamma(\pi) = (-2,0)$, et minima locaux en $\gamma(\frac{\pi}{2}) = (0,2)$ et $\gamma(\frac{3\pi}{2}) = (0,-2)$.

De plus $\max f(C) = f(2,0) = 1$ $\min f(C) = f(0,2) = -1$.

e) On veut retrouver le résultat du point (d) par la méthode des multiplicateurs de Lagrange.

On peut remarquer que $f(x,y) \equiv \frac{x^2-y^2}{4}$ on C. donc on peut travailler aussi avec $h(x,y) = \frac{x^2-y^2}{4}$.

On remarque aussi que f est C^1, et C est ~~ligne~~ une courbe régulière, (C^∞) $(\nabla g(x,y) \neq (0,0)$ $\forall (x,y) \in C)$.

$$\nabla f = \left(\frac{2x(x^2+y^2) - 2x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} ; \frac{4x^2y}{(x^2+y^2)^2} \right). \qquad \nabla g = (2x, 2y)$$

La méthode des multiplicateurs de Lagrange nous dit que les extrema de $f|_C$ satisfont le ~~condition~~ systèmes $\nabla f(x,y) + \lambda \nabla g(x,y) = 0$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$ (dit multiplicateur de Lagrange).

Dans ce cas on obtient:

$$\begin{cases} \dfrac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2} + 2\lambda x = 0 \\ \dfrac{4x^2y}{(x^2+y^2)^2} + 2\lambda y = 0 \\ x^2+y^2 = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x\left(2\lambda + \dfrac{y^2}{4}\right) = 0 \\ y\left(2\lambda + \dfrac{x^2}{4}\right) = 0 \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$$

Si $x=y=0$, la troisième condition n'est pas vérifiée, donc $(0,0) \notin A$.

Si $x=0$, on a $2\lambda=0$, et $y^2=4$ donc $(0,\pm 2) \in A$.

Si $y=0$ on a de même $2\lambda=0$, et $x^2=4$, donc $(\pm 2,0) \in A$.

Si $x,y \neq 0$. on a $\begin{cases} 2\lambda + \dfrac{y^2}{4} = 0 \\ 2\lambda + \dfrac{x^2}{4} = 0 \\ x^2+y^2=4 \end{cases} \to \begin{cases} 4\lambda = -1 \text{ (somme de I et II)}. \\ \dfrac{x^2}{\cancel{4}} = y^2 = 2, \end{cases}$

C'est à dire, $(x,y) = (\sqrt{2},\sqrt{2}), (-\sqrt{2},\sqrt{2}), (\sqrt{2},-\sqrt{2}), (-\sqrt{2},-\sqrt{2}) \in A$.

A a donc 8 points.

f) Pour $a \in A$, la droite tangente à C en a est donnée par l'équation

$$\nabla g(a) \cdot \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} = 0$$

$a=(x_0,y_0)$.

Par symétries: $(\cancel{f}f(x,y) = f(-x,y) = f(x,-y) = f(-x,-y) = -f(\cancel{x}y,x))$, on pourra considérer que les points $\cancel{\ }(2,0)$ et $(\sqrt{2},\sqrt{2})$.

Pour $a=(2,0)$, $L_{(2,0)} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4\cdot(x-2) + 0(y-0) = 0\} = \{(x,y) \mid x=2\}$.

Pour $a=(\sqrt{2},\sqrt{2})$, $L_{(\sqrt{2},\sqrt{2})} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2\sqrt{2}(x-\sqrt{2}) + 2\sqrt{2}(y-\sqrt{2}) = 0\} = \{(x,y) \mid x+y = 2\sqrt{2}\}$.

g) Vu qu'on veut étudier $f|_C$, et $f|_C \equiv h|_C$ avec $h(x,y) = \frac{x^2-y^2}{4}$,

on va utiliser h à la place de f

$$\nabla h(x,y) = \left(\frac{x}{2}, -\frac{y}{2}\right). \qquad H(h)(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Pour $a = (2,0)$, $L_a = \{x=2\}$ et $v_a = (0,1)$.

alors $^t v_a \cdot H(h)(a) \cdot v_a = \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(a) = -\frac{1}{2} < 0$.

(car le signe est <0).

Il s'en suit que $(2,0)$ est un point de maximum local pour $f|_C$.

Pour $a = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $L_a = \{x+y = 2\sqrt{2}\}$, et $v_a = (1,-1)$. On a donc:

$$^t v_a \cdot H(h)(a) \cdot v_a = (1,-1) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (1,-1) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0.$$

Dans ce cas on ne peut pas conclure si $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ est un extreme (car la valeur est $=0$).

Pour les autres points, par symétrie, $(-2,0)$ est un point de max local,

et $(0, \pm 2)$ sont des points de min local.

par exemple si $a = (0,-2)$, $v_a = (1,0)$, et $^t v_a H(h)(a) \cdot v_a = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(a) = \frac{1}{2} > 0$

donc a est un point de minimum local. pour $f|_C$.

Exo 22

c) $f(x,y,z) = x^2 - 2xy + z^2$, $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \ x^2+y^2 = 1, \ y+z=0\}$

· Méthode 1: On utilise les multiplicateurs de Lagrange:

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ est de classe C^∞, $S = g^{-1}(\{0\})$, où

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x,y,z) \mapsto (\underbrace{x^2+y^2-1}_{g_1}, \underbrace{xy+z}_{g_2}).$$

Si $p_0=(x_0,y_0,z_0)$ est un extremum local, le théorème des multiplicateurs de Lagrange nous dit que ~~il existe $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ tels que~~ si

$$F(x,y,z,\lambda,\mu) = f(x,y,z)+\lambda g_1(x,y,z)+\mu g_2(x,y,z) \quad \text{alors}$$

~~$\nabla F(p,\lambda,\mu)=0$~~, $\exists\, \lambda,\mu\in\mathbb{R}$ tels que $\nabla F(x_0,y_0,z_0,\lambda,\mu)=0$.

On remarque que S est une courbe régulière en tout point :

$$\nabla g_1(x,y,z) = (2x,2y,0) \quad ; \quad \nabla g_2(x,y,z)=(0,1,1).$$

$$dg = \begin{pmatrix}\nabla g_1\\ \nabla g_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2x & 2y & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$ est toujours de rang 2 pour $(x,y,z)\in S$

car $(x,y)\neq(0,0)$ et ∇g_1 et ∇g_2 ne sont jamais colinéaires sous cette hypothèse.

On calcule maintenant $\nabla f(x,y,z) = (2x-2y\,;\,-2x\,;\,2z)$.

On peut donc écrire le système $\nabla F(x,y,z,\lambda,\mu)=0$:

$$\begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial x}\\[4pt] \frac{\partial F}{\partial y}\\[4pt] \frac{\partial F}{\partial z}\\[4pt] \frac{\partial F}{\partial \lambda}\\[4pt] \frac{\partial F}{\partial \mu}\end{array}\left\{\begin{array}{l} 2x-2y+2\lambda x=0\\ -2x+2\lambda y+\mu=0\\ 2z+\mu=0\\ x^2+y^2=1\\ y+z=0\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{ll} \mu=-2z=2y & \text{III}\\ y=-z & \text{V}\\ x(1+\lambda)-y=0 & \text{I}\\ -x+y(1+\lambda)=0 & \text{II}\\ x^2+y^2=1 & \text{IV}\end{array}\right. \quad \begin{array}{l}\\ \\ \left.\begin{array}{l}\\ \\ \end{array}\right\}(*)\\ \\ \end{array}$$

On veut donc trouver une solution $(x,y)\neq(0,0)$ du système linéaire $(*)$.
(car $x^2+y^2=1$)

On en a que si le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix}1+\lambda & -1\\ -1 & 1+\lambda\end{pmatrix}=A$

associée au système $(*)$ s'annulle.

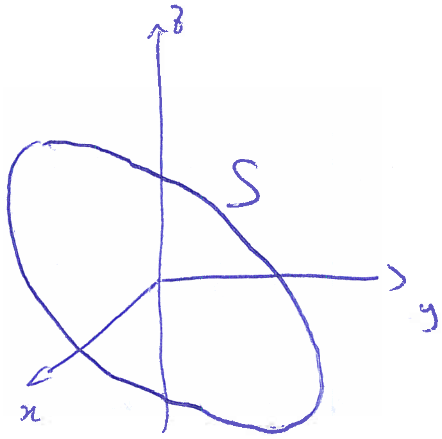
$\det A = (1+\lambda)^2 - 1 = \lambda(\lambda+2) = 0 \iff \lambda = 0$ ou $\lambda = -2$.

Si $\lambda = 0$, les solutions du système sont : $x = y \in \mathbb{R}$

Avec la condition $x^2+y^2=1$, on a $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, $y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, $z = \mp\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Si $\lambda = -2$, les solutions du système sont : $x = -y \in \mathbb{R}$.

On a donc $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, $y = \mp\frac{\sqrt{2}}{2}$ $z = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.



Donc les extrema possibles sont :

$p_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $p_2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$p_3 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $p_4 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Or, S est un compact (c'est un ellipse, voir dessin) :

S est fermé car image réciproque par g (continue) de $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{fermé}}}{\{(0,0)\}}$.

S est borné, car $(x,y,z) \in S \Rightarrow x^2+y^2=1 \Rightarrow |x|, |y| \leq 1$.

$z = -y \Rightarrow |z| = |y| \leq 1$.

S est fermé et borné dans $\mathbb{R}^3$ (dim finie) $\iff S$ est compact.

Mais alors $f|_S : S \to \mathbb{R}$ continue à valeurs dans un compact

$\Rightarrow f|_S$ admet max et min globaux.

Dans ce cadre, les max et min globaux sont aussi locaux.

Donc ils doivent être parmi p_1, p_2, p_3, p_4

$f(p_1) = f(p_2) = \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} = 0.$

$f(p_3) = f(p_4) = \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} = 2.$

Donc p_1 et p_2 sont des points de minima locaux et globaux

p_3 et p_4 " " maxima " " ".

Rmq: on a aussi que $f(S) = [0,2]$. (une application du T.VI).

Méthode 2: On remarque que S est un ellypse, paramétrée par

$\gamma : \mathbb{R} \to S$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, -\sin t)$.

En effet ce n'est pas trop difficil montrer que $\gamma(\mathbb{R}) = S$:

$\textcircled{\subseteq}$: $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$, $\sin t + (-\sin t) = 0$ (ok).

$\textcircled{\supseteq}$ on sait que $(\cos t, \sin t)$ paramétrise $C = \{x^2+y^2=1\}$ et bien évidemment

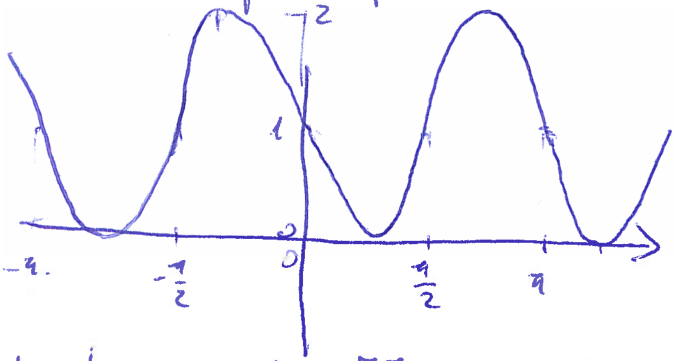
$\forall (x,y) \in C$, $\exists! z$ t.q. $(x,y,z) \in S$ $(z = -y)$. Pour étudier $f|_S$,

il suffit donc étudier $\underbrace{f \circ \gamma}_{h} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. $f \circ \gamma(t) = f(\cos t, \sin t, -\sin t)$

$= \cos^2 t - 2\sin t \cos t + \sin^2 t = 1 - \cancel{2}\sin 2t$.

or, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction C^∞ dans $\mathbb{R}$, qu'on peut étudier

avec des méthodes standard:



Il s'en suit que en $[0, 2\pi]$ on

a deux points de minimum:

$t_1 = \frac{\pi}{4}$ et $t_2 = \frac{5\pi}{4}$, et deux points de max.: $t_3 = \frac{7\pi}{4}$ et $t_4 = \frac{3\pi}{4}$.

On conclut par la remarque: $P_j = \gamma(t_j)$ $j = 1 \dots 4$.